РЕЦЕНЗИЯ

върху дисертационен труд за присъждане на
образователната и научна степен "Доктор"
в Професионално направление: 4.5 Математика,
по научната специалност 01.01.09 "Изчислителна математика"
Автор: Мария Димитрова Лимбъри
Тема: Оптимални многонивови методи за конформни квадратични,
биквадратични и бикубични крайни елементи
Научен ръководител: проф д.м.н. Светозар Маргенов

Рецензент: проф. дмн Стефка Николаева Димова,
жив. в София, ж.к. "Хр. Смирненски", ул. "Хемус" бл.62, вх.А, ап.54

Актуалност и значимост на проблема. Дисертацията е в много актуална област на изчислителната математика, в теорията и практиката на научните пресмятания, а именно, разработване, изследване и тестване на ефективни методи за решаване на линейни алгебрични системи, получени от крайноелементна апроксимация на елиптични диференциални задачи. Особено интересни и важни за практиката са такива методи и алгоритми, които са робастни по отношение на параметрите на задачата, т.е. сходимостта им не зависи от параметрите. Такива задачи възникват при моделирането и компютърното симулиране на процеси в хетерогенни и/или анизотропни среди, както и при моделиране на различни взаимосвързани физически процеси.

Многонивовите итерационни методи, предложени в основополагащите работи на Акелсон и Василевски преди повече от 25 години, и впоследствие усъвършенствани и обобщени за по-широки класове от приложни задачи, са доказали че имат потенциал за успешно атакуване на проблема за робастността. Само че за ефективна реализация на идеята на тези методи е необходима една съществена и съвсем нетривиална, а често технически много трудна стъпка - йерархично разделяне на степените на свобода така, че ъгълът между генерираните подпространства да е достатъчно голям. Дисертацията на Мария Лимбъри е посветена именно на тази задача за крайно-елементни апроксимации с квадратични триъгълни и биквардатични и бикубичи правоъгълни конформни КЕ.

Обзор на съдържанието и приносите в дисертационния труд. Дисертацията съдържа 131 страници, разпределени в Увод, 4 глави, Заключение и Библиография от 75 заглавия.

В Увода е направен преглед на съвременното състояние на изследванията по темата, формулирани са ясно целите на дисертациония труд и използваната методология за осъществяването им, кратко е изложено съдържанието на дисертацията по глави. Приложени са списъци на публикации по темата на дисертацията, на изнесените доклади и на научните проекти, в които е участвала дисертантката.

В Глава 1 е поставена двумерната гранична линейна елиптична задача от II ред, за която са разработените в дисертацията методи. Формулирани са условия за матрицата от коефициентите, които определят различни случаи на анизотропия. Изложени са (п.1.2.) методите на спрегнатия градиент и обобщенията му за решаване на дискретните задачи - системи ЛАУ с разредени матрици, които се получават при прилагане на метода на крайните елементи (МКЕ). В п.1.3. е направен преглед на оптималните алгебрични многонивови итерационни (AMLI) методи. Формулирани са три леми за константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (УНКБШ), които се използват съществено по-нататък в дисертацията. Тази константа характеризира свойствата на разделянето при блочната факторизация на матрицата на системата, от които пък зависи ефективността на преобусловителите. Подробно са разгледани AMLI алгоритмите от мултипликативен тип, които се и използват в дисертацията.

Глава 2 е посветена на построяване и изследване на оптимални преобусловители за системи алгебрични уравнения, получени при крайно-елементна апроксимация на ортотропни елиптични задачи от втори ред с квадратични крайни елементи. Както отбелязах по-горе, основните математически трудности за преодоляване са при формулиране на йерархичното разделяне на неизвестните (степените на свобода) и оценката на константата в неравенството на КБШ при наличие на анизотропия в коефициентите на уравнението. Използвани са (п.2.3) три йерархични разделяния на неизвестните, именно, DA-, FR- и P-разделяния. За DA-раделянето глобалната йерархична матрица на коравина се асемблира от макроелементните матрици в 2x2 блочна форма (формула (2.3.1)). За FR-разделянето това се прави по подобен начин, но глобалната йерархична матрица на коравина е в 3x3 блочна форма (2.3.4), която посредством елиминация на част от неизвестните (подобна на "статична кондензация") се свежда отново до 2x2 форма (2.3.5).

В п.2.4 за ортотропния случай, който тук се характеризира с параметър ζ, е получена равномерна оценка (2.4.13) за константата в усиленото неравенство на КБШ (Лема 2.4.1.). Основна роля в този анализ играят подходящото параметризиране на анизотропията, представянето (2.4.14) чрез матрици, не зависещи от параметрите (най-вече от анизотропията) и удачна оценка на собствените стойности на малка обобщена спектрална задача. Събрани, тези стъпки в конструкцията и проведените доказателства, водят до основния резултат, Теорема 2.4.2., за оптималната изчислителна сложност на AMLI преобусловителя, равномерна по отношение на мрежова и коефициентна анизотропия. Ще отбележа, че изложението на отделните стъпки е отлично и логически последователно, а доказаталствата са математичеки много добре издържани. По мое менение две неща не са мотивирани добре:

(1) как използването на средни стойности на коефициентите се "връзва"

с квадратичните крайни елементи; ако коефициентите са линейни, няма ли да се загуби точност заради усредняването?

(2) ако има скокове на коефициентите, на коя мрежа те са представени точно - на най-фината или на най-грубата.

Първият въпрос се отнася по-скоро до апроксимацията и не е толкова важен, но вторият е съществен за конструциите на преобуславителите и би следвало да бъде коментиран. От текста на Забележка 2.4.1. "... независеща от потенциални скокове на коефициенти между интерфейси на елементи от най-грубата мрежа..." би могло да се заключи, че скоковете на коефициентите се представят точно на най-грубата мрежа, но това би трябвало да се каже явно при постановката на дискретната задача и при формулировката на резултатите.

В п.2.5. са представени резултати от числени експерименти за сравняване на константите в УНКБШ при трите вида йерархични разделяния на възлите (таблица 2.1.) и за относителното число на обусловеност на апроксимацията на допълнението на Шур (Таблица 2.2). Фиг. 2.4. и 2.5 обаче не са пояснени добре - не са дефинирани означенията $\hat{k}, \check{k}, \tilde{k}$.

В **Глава 3** за ортотропната елиптична задача от II ред в област, съставена от правоъгълници, е приложен МКЕ с използване на биквадратични и бикубични правоъгълни елементи. Използвани са йерархични базисни разделяния, като сгъстяването на мрежата на всяка стъпка се прави по едно от координатните направления (така нареченото $SC-$ разделяне).

В п.3.2 е изследван случая на биквадратични (Q_2) елементи. При равномерно $SC-$сгъстяване на мрежата, когато всички елементи се разделят на ρ на брой еднакви поделемента, в п.3.2.1 са получени оценки на константата γ в УНКБШ (Лема 3.2.1), които са равномерни по отношение на коефициента на анизотропия за коефициенти на сгъстяване $\rho = 2, 3, 4, 5$. Показано е, че при подходящо номериране на неизвестните от главните блокове A_{11}^{k+1}, тези блокове приемат лентова структура с ширина на полулентата, която зависи от ρ. Това дава възможност за решаване на системите да се използват преки методи, които имат оптимална изчислителна сложност. По този начин е доказан основният резултат тук (Т.3.2.1) за оптималния ред на изчислителна сложност на $SCAMLI$ преобуславителите за конформни биквадратични правоъгълни КЕ и параметър $\rho = 5$. Аналогични резултати са получени и за случая на балансирано SC сгъстяване на мрежата (сгъстяването се прави последователно в едното и в другото координатно направление) с параметър на сгъстяване ρ. При $\rho = 2$ за константата в УНКБШ е получена (Лема 3.2.2) оценката (3.2.26), а основният резултат за оптимална изчислителна сложност, равномерна по отношение на мрежовата и коефициентната анизотропия, е формулиран и доказан в Теорема 3.2.2.

Случаят на бикубични (Q_3) елементи при равномерно и балансирано сгъстяване на мрежата е изследван в п.3.3. С числени експерименти, направени за биквадратични и бикубични елементи е изследвана константата в УНКБШ като функция на коефициента на анизотропия за различни стойности на коефициента на сгъстяване ρ. Тези експерименти потвърждават асимптотичната точност на теоретичните резултати.

Глава 4 е посветена на нейерархични базисни разделяния на областта при използване на квадратични КЕ за решаване на силно анизотропни (неортотропни) задачи. При използване на квадратични елементи и стандартни йерархични разделяния ъгълът между грубото пространство и неговото йерархично допълнение не е равномерно ограничен по отношение на мрежовата и/или коефициентна анизотропия. За да се конструират робастни преобусловители за такива задачи е разработена нова техника за построяване на многонивови преобусловители - адитивна апроксимация на допълнението на Шур (ASCA). Многонивовите преобусловители, получени по тази техника, се асемблират от локални матрици, което би дало възможност за тяхната паралелна програмна реализация.

В п.4.2. е предложен и описан алгоритъм за пресмятане на апроксимация на допълнението на Шур, която е спектрално еквивалентна на точното допълнение на Шур и е разредена матрица. В п.4.3., като се използва подходящо параметризиране на анизотропията в елиптичната задача, е изследван блочния Якоби оператор на изглаждане. Леми 4.3.1. и 4.3.2. са основа за получаване на оценката (4.3.22) на матрицата на блочния метод на Якоби (Теорема 4.3.1.), а също и на матрицата на блочния метод на Гаус-Зайдел (Следствие 4.3.2.). В п.4.4. е оценена нормата на матрицата на разпространение на грешката на двунивов метод, дефиниран с итерационния процес (4.4.27), (4.4.28).

Представените в п.4.5 числени експерименти са върху няколко тестови задачи: ортотропна и анизотропни със завъртаща се посока на анизотропия, както и при различни реализации на нелинейния AMLI W метод. Резултатите от експериментите са добре анализирани и показват добрите възможности на този нов подход.

Дисертацията е структурирана добре. Цитирани са резултатите на други автори, които по някакъв начин са използвани в дисертацията или просто предхождат тези на дисертанта. Във втора, трета и четвърта глава се съдържат оригинални резултати както от теоретичен, така и от приложен характер. Дисертацията съдържа значителен брой конструкции, които включват различни видове двунивови разделяния на степените на свобода и сгъстявания на мрежата. За тях е направен пълен анализ на многонивовия метод в случая на ортотропни и анизотропни среди. Твърде впечатляващи са теоретичните резултати за оптималността на изчислителната сложност на получените преобусловители и тяхната независимост от коефициентната анизотропия, контраст, и/или ортотропия (теореми: 2.4.2, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2). Нещо повече, всички методи са реализирани и тествани върху моделни, но реалистични елиптични задачи. Бих искала да подчертая, че са преодолени значителни математичеки трудно-

сти особено при оценките на усилените неравенства на КБШ. Както заявява и дисертантката, направените конструкции биха могли да се използуват и за тримерни задачи, но тяхното теоретично обосноваване ще бъде изключитено трудна математическа задача.

Публикации по темата на дисертационния труд. Резултатите, представени в дисертационния труд, са публикувани в два журнала с импакт фактор - Central Eur.J.Math. (IF 0.44) и Num. Lin. Alg. Appl. (IF 1.168); в международни поредици с SJR индекс: 2 работи в LNCS (SJR 0.33) и 2 в AIP Conf.Proc. (SJR 0.14); една работа в Springer Proc. in Math. and Stat., 1 работа в Сборника с разширени абстракти Annual Meeting of BGSIAM'10. Така специфичните условия за придобиване на научни степени в ИИКТ са дори преизпълнени. Две от публикациите са с един съавтор - научния ръководител, 5 от работите са с двама съавтори, една е с трима съавтори.

Апробация на резултатите. Резултатите в дисертационния труд са докладвани на специализирани международни научни конференции - 4 в България и една в Австрия, както и на други форуми и семинари в България и Австрия.

Участие в научни проекти. Мария Лимбъри има активно участие в научни проекти - в 3 проекта, финансирани от НФНИ, и в един проект по FP7.

Автореферат. Авторефератът е на 34 стр. и отразява съдържанието на дисертационния труд, но за улеснение при писането му са взети отделни пасажи от дисертацията, като много от означенията са останали недефинирани. Основните приноси на автора са отразени правилно в Авторската справка.

Лични впечатления. Познавам Мария Лимбъри от обучението и' във ФМИ, МП "Изчислителна математика и математическо моделиране". Тя посещаваше курсовете ми, на изпитите беше винаги отлично подготвена. Впоследствие беше и моя дипломантка, защити дипломната си работа с отличие.

Забележки и препоръки. Забелязаните печатни грешки са малко. Една от тях, "преобуславител", се повтаря многократно, дори в заглавията на параграфи. Имам и няколко препоръки. При цитиране на известни резултати да се цитират оригиналните източници, а не монографиите, в които те са систематизирани. Терминът "последователност" (от мрежи) е русизъм - на български би трябвало да се използва "редица" (от мрежи), както и "ред" (на сходимост) вместо "порядък" (на сходимост).

Заключение: *Оценката ми за дисертационния труд, научните публикации и научните приноси на Мария Димитрова Лимбъри е положителна. Представеният дисертационен труд отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ,* *Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Правилника за специфичните условия за придобиване на научни степени в ИИКТ, БАН. Всичко това ми дава основание убедено да предложа да бъде присъдена образователната и научна* степен “доктор” на Мария Димитрова Лимбъри в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление: *4.5 Математика, научна специалност: 01.01.09 - “Изчислителна математика”.*

12.09.2013 г.

гр. София